【2011 2학기 미분방정식 시험 #3】	학과		학번		이름	

문제 1: $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=x^2$ (30점)

(a) 위 미분방정식은 $x=0$에서 정칙특이점을 가짐을 보여라.
(b) 위 방정식의 해를 구하라.

(답) (a) 제차미방의 경우 $y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$이다.

$P(x)=\frac{3x-1}{x(x-1)}$, $Q(x)=\frac{1}{x(x-1)}$이므로

$p(x)=xP(x)=\frac{3x-1}{(x-1)}, q(x)=x^2Q(x)=\frac{x}{(x-1)}$

$p_0=\lim_{x\to 0}p(x)=1, q_0=\lim_{x\to 0}q(x)=0$

따라서 미분방정식은 $x=0$에서 정칙특이점을 가진다.

(b) 먼저 제차미분방정식의 해를 구해보자

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}, \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$

$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+$
$3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$

$\therefore -\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)^2 a_n x^{n+r}=0$

차수를 맞추면 ($n\to k$로 바꾸고 뒤의 항에서 $n+r\to k+r-1$로 바꿈).
x^{r-1}항은 비교 항이 없으므로 단독으로 정리한다.

$-r^2a_0x^{r-1}-\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)^2a_kx^{k+r-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)^2a_{k-1}x^{k+r-1}=0$

결정방정식은 x^{r-1}항은 0이 되어야 하는 조건에서
$r^2=0\to r_1=r_2=0$ (중근)
그리고 나머지 항에서 $a_k=a_{k-1}$을 구한다.
$k=1\ \ a_1=a_0,\ k=2\ \ a_2=a_1=a_0,\ k=3\ \ a_3=a_2=a_0,\ \cdots$
$\therefore a_0=a_1=a_2=a_3=\ \cdots\equiv 1$

$\therefore y_1(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

한 해를 이용하여 다른 해 구하기 ($y''+p(x)y'+q(x)=0$)

$u'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}, y_2=uy_1$

$y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$

$-\int p(x)dx=-\int\frac{3x-1}{x(x-1)}dx=-\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}\right)dx$
$=-2\ln(x-1)-\ln x=-\ln x(x-1)^2$

$\therefore u'=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}=(1-x)^2e^{\ln\frac{1}{x(x-1)^2}}=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow u=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$

$y_2=uy_1=\frac{1}{1-x}\ln x$

따라서 제차미방의 해는 $y=c_1\frac{1}{1-x}+c_2\frac{\ln x}{1-x}$ 이다.

특수해를 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$이라 두면

$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)^2a_nx^{n+r}=x^2$

최소차수를 비교하면 ($n=0$)

$-a_0r^2x^{r-1}=x^2\to\ \therefore r=3,\ a_0=-\frac{1}{9}$

$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)^2a_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)^2a_nx^{n+3}=x^2$

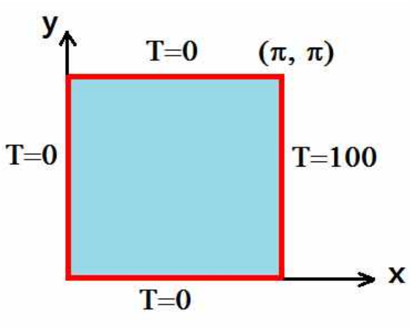
그리고 나머지 항에서 $a_k=a_{k-1}$을 구한다.
$k=1\ \ a_1=a_0,\ k=2\ \ a_2=a_1=a_0,\ k=3\ \ a_3=a_2=a_0,\ \cdots$

$\therefore a_0=a_1=a_2=a_3=\ \cdots\equiv-\frac{1}{9}$

$y_p=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^3(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$
$=-\frac{x^3}{9}(1+x+x^2+\cdots)=\frac{x^3}{9(x-1)}$

$y=c_1\frac{1}{1-x}+c_2\frac{\ln x}{1-x}+\frac{x^3}{9(x-1)}$

문제 2. 아래 그림과 같은 경계조건을 가진 정사각형의 hot plate에서의 온도분포를 구하라. **(35점)**



(답)

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi$$

경계조건 $T(x,y)$

$T(x,0)=0,\ T(x,\pi)=0 \qquad 0<y<\pi$
$T(0,y)=0,\ \ T(\pi,y)=100 \qquad 0<x<\pi$

※ 편미분방정식을 풀지 않더라도 이 문제의 해는 경계조건을 보면 $T(x,y)\sim\sinh\alpha x\sin\alpha y$가 되어야 함을 짐작할 수 있다.

$T(x,y)=X(x)Y(y)$을 대입하면

$XY''=X''Y$

양변을 XY로 나누면

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

$X''+\lambda X=0 \qquad X'(0)=0,\ X(\pi)=100$
$Y''-\lambda Y=0 \qquad Y(x,0)=0,\ Y(x,\pi)=0$

y에 관련된 경계조건이 간단하므로 이를 먼저 푼다.
$Y''-\lambda Y=0$ 에서 (경계조건; $Y(0)=0,\ \ Y(\pi)=0$)

(i) $\lambda=0$인 경우
$Y''=0$
$\to Y=c_1+c_2y$
경계조건에서 $Y(0)=c_1=0$
$Y(\pi)=c_2\pi=0$에서 $c_2=0$이므로 해가 될 수 없다.

(ii) $\lambda<0$인 경우 ($\lambda=-\alpha^2$)

$Y'' + \alpha^2 Y = 0$

$\rightarrow Y = c_3 \cos\alpha y + c_4 \sin\alpha y$

경계조건; $Y(0) = c_3 = 0$

$Y(\pi) = c_4 \sin\alpha\pi = 0$에서 $\alpha\pi = n\pi \rightarrow \therefore \alpha = n$이다.

$\therefore \lambda_n = -n^2 \qquad Y = c_4 \sin ny$

(iii) $\lambda > 0$인 경우 ($\lambda = \alpha^2$)

$Y'' - \alpha^2 Y = 0$

$\rightarrow Y = c_5 \cosh\alpha y + c_6 \sinh\alpha y$

경계조건; $Y(0) = c_5 = 0$

$Y(\pi) = c_6 \sinh\alpha\pi \neq 0$ 이므로 해가 될 수 없다.

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = -n^2 \qquad Y_n(x) = \cos ny \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$X'' + X = 0$ 에서 $\lambda_n = -n^2$ 을 대입하면

$X'' - n^2 X = 0$ 가 된다.

$X = c_7 \cosh nx + c_8 \sinh nx$

경계조건; $X(0) = c_7 = 0 \rightarrow \therefore X(x) = c_7 \sinh nx$

$T_n = X(x)Y(y)$에서

$$T_n = A_n \sinh nx \sin ny \qquad n = 1, 2, \cdots$$

따라서 일반해는

$$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh nx \sin ny$$

마지막 경계조건 $T(\pi, y) = 100$를 이용하면

$$T(\pi, y) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh n\pi \sin ny$$

양변에 $\sin my$를 곱하여 적분하면

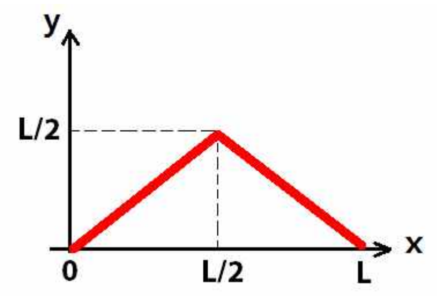
$\int_0^{\pi} 100 \sin my \, dy = \int_0^{\pi} A_n \sinh n\pi \sin ny \sin my \, dy$이 된다.

$\int_0^{\pi} \sin ny \sin my \, dy = \frac{\pi}{2}$ for $m = n$을 이용하면

$A_n = \frac{200}{n\pi} \frac{[1 - \cos n\pi]}{\sinh n\pi} = \frac{200\,[1 - (-1)^n]}{n\pi \sinh n\pi}$ 을 얻는다. 따라서 해는

$T(x,y) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\sinh n\pi} \sinh nx \sin ny$이다.

문제3. 현의 진동에서 파의 전파속도는 v라고 한다. $t = 0$에서 그림과 같은 초기조건과 초기 속도는 모든 위치에서 0이라고 한다. 그리고 양끝은 항상 고정되어 있다. 위의 현의 진동에 대한 해를 구하라. (35점)



(답) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; vibrating string (끝점 고정)

$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L/2 \\ L - x & L/2 < x < L \end{cases}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$; 초기조건

$y(0,t) = 0,\ y(L,t) = 0$; 경계조건 (끝점 고정)

$y(x,t) = X(x)T(t)$을 대입하면

$$XT'' = v^2 X'' T$$

양변을 XT로 나누면

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = -\lambda$$

$\therefore X'' + \lambda X = 0 \leftarrow X(0) = 0,\ X(L) = 0$

$T'' + v^2 \lambda T = 0 \leftarrow T(0) = f(x),\ T'(0) = 0$

끝점이 고정되어 있으므로 sin함수가 해가 되어야 하므로 $\lambda = \alpha^2 > 0$인 경우만 가능하다.

$\lambda > 0$인 경우 ($\lambda = \alpha^2$)

$X'' + \alpha^2 X = 0$

$\rightarrow X = c_5 \cos\alpha x + c_6 \sin\alpha x$

경계조건에서 $X(0) = c_5 = 0,\ \therefore c_5 = 0 \rightarrow X(x) = c_6 \sin\alpha x$

$X(L) = c_6 \sin\alpha L = 0$

$\therefore \alpha L = n\pi \rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \cdots$

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

시간에 대한 함수는

$T'' + v^2 \lambda_n T \rightarrow \therefore T(t) = d_1 \cos\frac{n\pi v t}{L} + d_2 \sin\frac{n\pi v t}{L}$

따라서 일반해는 중첩원리에 의해

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi v t}{L} + B_n \sin\frac{n\pi v t}{L}\right) \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$

위의 해는 초기조건을 만족하여야 한다.

$\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$에서 $B_n = 0$임을 알 수 있다. 따라서 해는

$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi vt}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}$이다.

이 해의 양변에 $\sin\frac{m\pi x}{L}$을 곱하여 초기조건

$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L/2 \\ L - x & L/2 < x < L \end{cases}$을 적용하면

$\int_0^L y(x,0) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ 에서

$\int_0^{L/2} x \sin\frac{m\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \sin\frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx$

이 된다. 위식의 왼쪽 적분은 부분적분을 하면 $2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{2}$를 얻을 수 있다. 그리고 오른쪽은 sin 함수의 직교 조건인

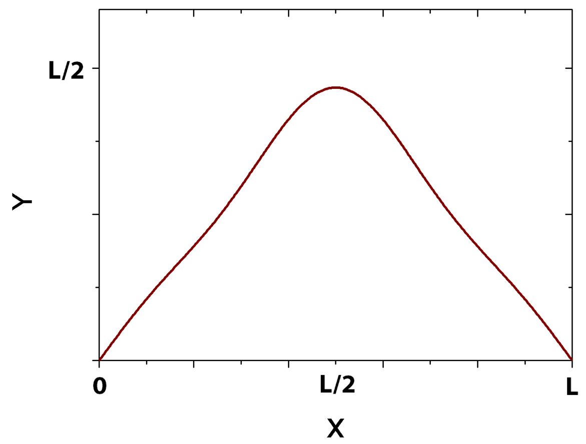
$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{2}$ for $m = n$을 이용하면 $\frac{L}{2} A_n$을 얻는다. 따라서 $A_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$를 얻는다. 따라서 최종적인 해는

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4L}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}\right) \cos\frac{n\pi vt}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}$$
$$= \frac{4L}{\pi^2} \left[\sin\frac{\pi x}{L} \cos\frac{\pi vt}{L} - \frac{1}{3^2} \sin\frac{3\pi x}{L} \cos\frac{3\pi vt}{L} + \frac{1}{5^2} \sin\frac{5\pi x}{L} \cos\frac{5\pi vt}{L} - \cdots\right]$$

$$※\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{L/2}^L (L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$=\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi+\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n\pi}\left[\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right]=2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}$$



$$y(x,0)=\frac{4}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}\right]_{t=0}$$