I. 미분방정식

상미분방정식(ordinary differential equation)

편미분방정식(partial differential equation)

계수 (order): 미분한 횟수

차수 (degree): 미분한 함수의 차수

Ex) $xy' = 2y$: 1계 1차 상미분방정식

$y'' + 4y = x^2 \sin x$: 2계 1차 상미분방정식

$\sqrt{xy'' + 4(y')^2} = e^x$: 2계 2차 상미분방정식

1. 미분방정식의 해 (solution)

미분방정식에 대입하면 방정식이 만족되는 것

일반해 (general solution) : 계수만큼 상수를 가진 해

특수해 (particular solution) : 임의의 상수에 특정한 값을 대입한 해

특이해 (singular solution) : 특수해가 아닌 해

Ex) $y = cx^2$은 $xy' = 2y$의 해

대입하면 $x(2cx) = 2y \rightarrow 2cx^2 = 2y \leftarrow \because cx^2 = y$

Ex) $y=\frac{x^2}{4}$은 $(y')^2-xy'+y=0$의 해

$y'=\frac{x}{2}$을 대입하면 만족된다. 일반해는 $y=cx-c^2$인데 어떤 값을

c에 넣어도 $y=\frac{x^2}{4}$을 얻을 수 없다. $y=\frac{x^2}{4}$는 특이해이다.

2. 미분방정식의 형성

Ex) 원군 (circular group) : $x^2+y^2=a^2$

미분하면 $2x+2yy'=0 \rightarrow y'=-\frac{x}{y}$ (접선의 기울기) 또는

$yy'=-x$가 위 원군의 미분방정식이다.

Ex) $(x-c)^2+y^2=1$

미분하면 $2(x-c)+2yy'=0 \rightarrow x-c=-yy'$

또는 원래의 식에 이를 대입하면

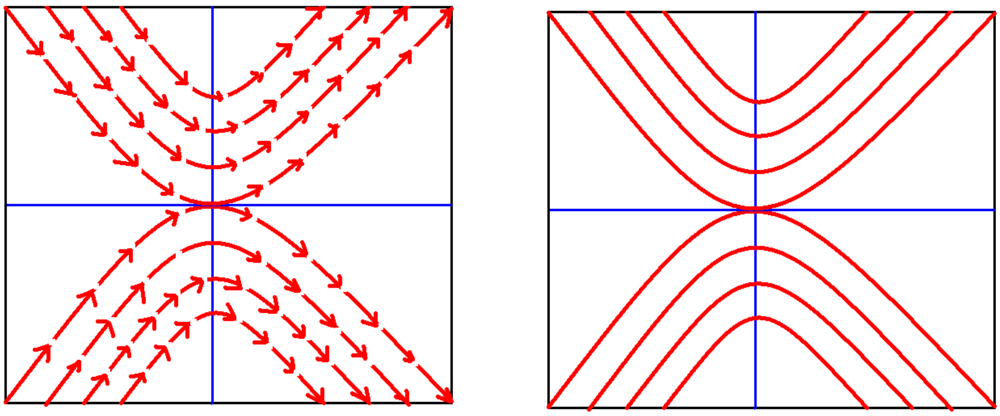
$(-yy')^2+y^2=1 \rightarrow y^2[1+(y')^2]=1$

3. 방향장 (direction fields)

접선장(slope field) : $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$; (x,y)위치에서의 접선

Ex) $y' = 0.2xy$

해는 $y = ce^{0.1x^2}$



방향장　　　　　　　　　　해곡선군

4. 경계조건 문제 (boundary value problem)

$y' = f(x,y)$: 무수히 많은 해를 가짐

경계조건 : $y(x_o) = y_o$ → 하나의 해로 특정함

(경계조건 문제) Ex) $y' = f(x,y)$　　　　$y(x_o) = y_o$

II. 1계 미분방정식

1. 변수분리형

(a) 기본형

$y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ 또는 $g(y)dy = f(x)dx$

따라서 해는 $\displaystyle\int g(y)dy = \int f(x)\,dx$

Ex) $2yy' + x = 0 \rightarrow 2ydy + xdx = 0$

$\displaystyle\int 2y\,dy = -\int x\,dx \ \rightarrow \ \therefore y^2 = -\frac{x^2}{2} + c$

Ex) $y' = -2xy \qquad y(0) = 1$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx \ \rightarrow \ln|y| = -x^2 + c$

경계조건 $x = 0,\ y = 1$을 대입하면 $\ln 1 = -0 + c \rightarrow \therefore c = 0$

$\ln y = -x^2 \rightarrow \therefore y = e^{-x^2}$

(b) $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$의 형태 $\leftarrow$동차형

$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \rightarrow y' = u'x + u$

대입하면 $u'x + u = g(u) \rightarrow \int \frac{du}{g(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$: 변수분리형

Ex) $2xy' = y^2 - x^2 \rightarrow y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}$

$y = ux \rightarrow y' = u'x + u$

원래의 미분방정식에 대입하면 $u'x + u = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u} = \frac{1}{2u}(u^2 - 1)$

$2uu'x = -u^2 - 1$이므로 $\int \frac{2udu}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$: 변수분리

$u^2 + 1 = t \rightarrow 2udu = dt$라고 두면 $\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x}$에서

$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c' = -\ln|x| + \ln|c|$

$\therefore 1 + u^2 = \frac{c}{x} \rightarrow 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x} \rightarrow \therefore \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$

중심 $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$이고 반지름이 $\frac{c}{2}$인 원의 방정식이다.

(c) $y' = g(ax+by+c)$의 형태

$v = ax+by+c$라고 두면 $\dfrac{dv}{dx} = a+by' = a+bg(v) \leftarrow \because y' = g(v)$

$\displaystyle\int \frac{dv}{a+bg(v)} = \int a\,dx$: 변수분리형

Ex) $(2x-4y+5)y' + (x-2y+3) = 0$

$$y' = -\frac{x-2y+3}{2x-4y+5} = -\frac{(x-2y)+3}{2(x-2y)+5}$$

$v = x-2y$라고 두면 $v' = 1-2y' \rightarrow y' = \dfrac{-v'+1}{2}$

$$\therefore \frac{-v'+1}{2} = -\frac{v+3}{2v+5} \rightarrow v' = \frac{4v+11}{2v+5}$$

$$\int \frac{2v+5}{4v+11}dv = \int dx \quad \leftarrow \frac{2v+5}{4v+11} = a + \frac{b}{4v+11} = \frac{4av+11a+b}{4v+11}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1/2}{4v+11}\right)dv = \int dx \rightarrow \frac{v}{2} - \frac{\ln(4v+11)}{8} = x+c$$

$v = x-2y$을 대입하면

$$4(x-2y) - \ln(4x-8y+11) = 8x+c'$$

(d) 응용문제

Ex) 방사능 동위원소: 반감기: 1000년

$$dN = -\lambda N dt \rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \rightarrow \ln N = -\lambda t + c \rightarrow \therefore N = e^{-\lambda t} e^{c}$$

초기조건 $t = 0, N = N_o \rightarrow e^{c} = N_o$

$\therefore N = N_o e^{-\lambda t}$

반감기 $t = \tau,\ N = \dfrac{N_o}{2} \rightarrow \dfrac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda\tau} \rightarrow \therefore \tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

$\therefore N = N_o e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t}$

$\dfrac{N_o}{5}$가 되는데 걸리는 시간 :

$\dfrac{N_o}{5} = N_o e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \rightarrow \therefore t = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}\tau = 2322\ yrs$

Ex) Newton의 냉각법칙 : 외부온도: 25°C

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_o) \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_o} = k \int dt \rightarrow \ln(T - T_o) = kt + c$$

$\therefore\ T = T_o + e^{c} e^{kt} = T_o + c' e^{kt}$

초기조건: (i) $t = 0,\ T = 20^{o}C \qquad T_o = 25^{o}C$

$$20 = 25 + c' e^{2k \times 0} \rightarrow c' = -5 \rightarrow T = T_o - 5e^{kt} = 25 - 5e^{kt}$$

경계조건: (ii) $t = 2,\ T = 22^{o}C$

$$22 = 25 - 5e^{2k} \rightarrow \therefore k = -0.2554 \rightarrow T = 25 - 5e^{-0.2554t}$$

$t = 10$일 때의 온도는?

$$T(10) = 25 - 5e^{-0.2554 \times 10} = 24.61\,^{o}C$$

Ex) 지구이탈속도

만유인력: $-\dfrac{GMm}{r^2}$

$$ma = -\frac{GMm}{r^2} \rightarrow a = -\frac{GM}{r^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} \rightarrow \therefore v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rightarrow \int v\,dv = -\int \frac{GM}{r^2}dr$$

$\therefore \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{GM}{r} + c \leftarrow \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{GmM}{r} = c$: 에너지 보존칙; $K.E. + P.E. = c$

경계조건: $r = R$에서 $v = v_o$

$$\rightarrow \frac{v_o^2}{2} = \frac{GM}{R} + c = \frac{M}{R}\frac{R^2}{M}g = gR + c \leftarrow g = \frac{GM}{R^2} \quad \rightarrow \therefore c = \frac{v_o^2}{2} - gR$$

$$\therefore \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + \frac{v_o^2}{2} - gR = \frac{M}{r}\frac{R^2}{M}g + \frac{v_o^2}{2} - gR = \frac{R^2}{r}g + \frac{v_o^2}{2} - gR$$

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_o^2 - 2gR$$

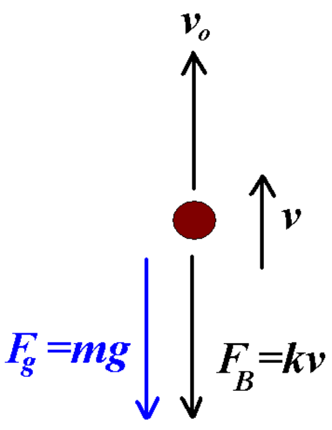
$r \rightarrow \infty$에서 지구탈출이면

$$v^2(r \rightarrow \infty) = v_o^2 - 2gR > 0 \rightarrow v_o > \sqrt{2gR} \cong 11.2\,km/\sec$$

Ex) $m\frac{dv}{dt}=-mg-kv \rightarrow \frac{dv}{dt}=-g-\frac{k}{m}v$

$$\int \frac{dv}{g+\frac{kv}{m}}=-\int dt \rightarrow \frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{kv}{m}\right)=-t+c$$

$$g+\frac{k}{m}v=c' e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow \therefore v=c'' e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$



$$k=0 \rightarrow m\frac{dv}{dt}=-mg \rightarrow v=-gt+c$$

$$t=0, v=v_o \rightarrow \therefore v=v_o-gt$$

초기조건: $t=0, v=v_o$

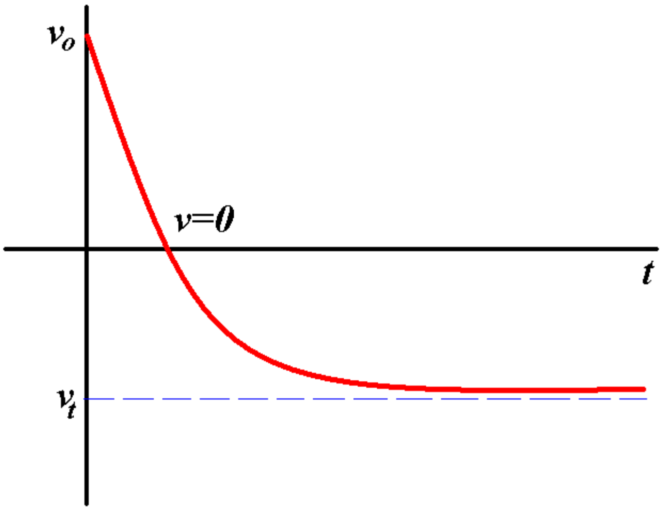
$$v_o=c''-\frac{mg}{k} \rightarrow c''=v_o+\frac{mg}{k}$$

$$\therefore v=\left(v_o+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

$t \rightarrow \infty$, $v=-\frac{mg}{k}$:종단속도 (terminal speed): $v_t=-\frac{mg}{k}$

$v=0$가 되는데 걸리는 시간

$$0=\left(v_o+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow t=-\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{k[mg+mg/k]}\right)=\frac{v_t}{g}\ln\frac{v_t}{v_o+v_t}$$



2. 완전미분형

(a) 완전미분의 조건

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$: 변수분리가 되지 않음 (1)

$dF = Mdx + Ndy = 0$: 완전미분

위 조건을 만족하는 $F(x,y)$가 발견되면 그 해는 $F(x,y)=c$가 된다.

$dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$이므로

$dF = Mdx + Ndy = 0$을 만족한다면

$M = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$가 된다.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$ 이고

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$ 이므로

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

을 만족한다. 따라서 위 조건이 만족되면 식 (1)이 완전미분이 된다. 즉, 식 (1)이 완전미분이면 식 (2)의 조건이 필요하다 (필요조건).
다음에는 식 (2)가 만족되면 식 (1)은 완전미분이 되는 충분조건이 되는지 보도록 하자.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M$이 되는 $\phi(x,y)$를 고려하자.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

식 (2)가 만족되면 $(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x})$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$이므로 이 식을 x에 대해 적분하면 (y는 고정)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N + B'(y)$$

을 얻는다. $F=\phi(x,y)-B(y)$의 함수에 대해

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}dy-B'(y)dy \\ &= Mdx+[N+B'(y)]dy-B'(y)dy \\ &= Mdx+Ndy=0 \end{aligned}$$

이므로 식 (1)은 완전미분이 된다.

Ex) $(x^3+3xy^2)dx+(3x^2y+y^3)dy=0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=6xy,\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=6xy$: 완전미분형

완전미분이면 $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$인 F가 존재한다.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=x^3+3xy^2 \to F=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2y^2}{2}+k(y)$

$\therefore \dfrac{\partial F}{\partial y}=3x^2y+k'(y) \Leftarrow 3x^2y+y^3 \to \therefore k'(y)=y^3 \to k(y)=\dfrac{y^4}{4}+c$

따라서 $F(x,y)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4} \leftarrow \because c=0$

$dF=0$에서 $F=c$이므로 해는 $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}=c$

Ex) $(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x+1,\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=2x+1$: 완전미분형

완전미분이면 $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$인 F가 존재한다.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + 2xy + y \rightarrow F = \frac{x^4}{4} + x^2y + yx + k(y)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + x + k'(y) \Leftarrow y^3 + x^2 + x \rightarrow \therefore k'(y) = y^3 \rightarrow k(y) = \frac{y^4}{4} + c$$

따라서 $F(x,y) = \frac{x^4}{4} + x^2y + \frac{y^4}{4} \leftarrow \because c = 0$

$dF = 0$에서 $F = c$이므로 해는 $\frac{x^4}{4} + x^2y + yx + \frac{y^4}{4} = c$

(b) 적분인자

$Mdx + Ndy = 0$가 완전미분은 아니지만 적당한 함수 $\lambda(x,y)$를 곱하면 완전미분이 될 수 있다. 이때 $\lambda(x,y)$을 적분인자 (integrating factor) 라고 부른다.

(정리 1) $Mdx + Ndy = 0$에 대하여 $p(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$가 x만의 함수이면 $\lambda = e^{\int p(x)dx}$가 적분인자가 된다.

(pf) $\lambda Mdx + \lambda Ndy = 0$는 완전미분방정식이다.

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}M + \lambda\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}N + \lambda\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\lambda = e^{\int p(x)dx}$가 x만의 함수이면 $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$이다.

따라서 $\lambda\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}N+\lambda\frac{\partial N}{\partial x}$이고 양변을 λN으로 나누면

$$\frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=p(x)\rightarrow\ln\lambda=\int p(x)dx\rightarrow\therefore\lambda=e^{\int p(x)dx}$$

(기본적인 전미분형)

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2},\ d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

Ex) $(x^2+y+1)dx-xdy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-1$: 완전미분형이 아님

$$p(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-x}(1+1)=-\frac{2}{x}$$

$$\lambda=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-\ln x^2}=\frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$을 양변에 곱해주면 $\left(1+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}+d\left(x-\frac{1}{x}\right)=0\rightarrow d\left(\frac{y}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=0\rightarrow\therefore\frac{y}{x}+x-\frac{1}{x}=c$$

Ex) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2y$: 완전미분형이 아님

$$p(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-2xy}(2y+2y)=-\frac{2}{x}$$

$$\lambda=e^{-\int \frac{2}{x}dx}=e^{-\ln x^2}=\frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$을 양변에 곱해주면 $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+\frac{y^2}{x^2}\rightarrow F=x-\frac{y^2}{x}+k(y)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+k'(y)\Leftarrow-\frac{2y}{x}\rightarrow \therefore k'(y)=0\longrightarrow k(y)=c$$

따라서 $F(x,y)=x-\frac{y^2}{x}\leftarrow \because c=0$

$dF=0$에서 $F=c$이므로 해는 $x-\frac{y^2}{x}=c$

(정리 2) $Mdx+Ndy=0$에 대하여 $q(y)=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$가 y만의 함수이면 $\lambda=e^{\int q(y)dy}$가 적분인자가 된다.

Ex) $2xydx+(y^2-x^2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2x$: 완전미분형이 아님

$$p(y)=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\frac{1}{2xy}(-4x)=-\frac{2}{y}$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$\frac{1}{y^2}$을 양변에 곱해주면 $\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

$$d\left(\frac{x^2}{y}\right) + d(y) = 0 \to d\left(\frac{x^2}{y} + y\right) = 0 \to \therefore \frac{x^2}{y} + y = c$$

Ex) $dx - (x + y^2)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1$: 완전미분형이 아님

$$p(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = \frac{1}{1}(-1-0) = -1$$

$$\lambda = e^{-\int dy} = e^{-y}$$

e^{-y}을 양변에 곱해주면 $e^{-y}dx - e^{-y}(x + y^2)dy = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-y} \to F = e^{-y}x + k(y)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y} = -e^{-y}x + k'(y) \Leftarrow -e^{-y}x - e^{-y}y^2 \to \therefore k'(y) = -e^{-y}y^2$$

$$\begin{aligned} k(y) &= -\int e^{-y}y^2 dy = -\int (-e^{-y})'y^2 dy = e^{-y}y^2 - \int e^{-y}(2y)dy \\ &= e^{-y}y^2 - \int (-e^{-y})'(2y)dy = e^{-y}y^2 + e^{-y}(2y) - \int 2e^{-y}dy \\ &= e^{-y}y^2 + 2ye^{-y} + 2e^{-y} + c = e^{-y}(y^2 + 2y + 2) + c \end{aligned}$$

따라서 $F(x,y) = xe^{-y} + e^{-y}(y^2 + 2y + 2) \leftarrow \because c = 0$

$dF = 0$에서 $F = c$이므로 해는

$$xe^{-y} + e^{-y}(y^2 + 2y + 2) = c$$

(정리 3) $Mdx+Ndy=0$에 대하여 $p(xy)=\dfrac{1}{xM-yN}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$이면

$\lambda=e^{\int p(xy)d(xy)}$가 적분인자가 된다.

(정리 4) $Mdx+Ndy=0$이 동차방정식이고 $xM+yN\neq 0$이면

$\dfrac{1}{xM+yN}$이 적분인자가 된다.

(pf) M이 n차 동차(차수가 모두 같음, ex. x^2-xy-y^2)이면

$M(tx,ty)=t^n M(x,y)$인데 양변을 미분하면

$M_x(tx,ty)x+M_y(tx,ty)y=nt^{n-1}M(x,y)\leftarrow M_x\equiv\dfrac{\partial M}{\partial x}$

$t\rightarrow 1$인 경우 $xM_x+yM_y=nM$이 만족된다.

위의 증명은 $\dfrac{M}{xM+yN}dx+\dfrac{N}{xM+yN}dy=0$가 완전 미분방정식임을 보이면 된다. 즉, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{M}{xM+yN}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{N}{xM+yN}\right)$을 보이면 된다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{xM+yN}\right)=\frac{yNM_y-MN-yMN_y}{(xM+yN)^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{xM+yN}\right)=\frac{xMN_x-MN-xNM_x}{(xM+yN)^2} \qquad (2)$$

위 두식을 빼 주면

$$\frac{yNM_y - MN - yMN_y - (xMN_x - MN - xNM_x)}{(xM+yN)^2}$$

$$= \frac{N(yM_y + xM_x) - M(yN_y + xN_x)}{(xM+yN)^2} = 0 \leftarrow \because yM_y + xM_x = nM$$

따라서 $\frac{1}{xM+yN}$이 적분인자가 된다.

Ex) $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$

동차방정식이다. 따라서 적분인자는

$$\frac{1}{xM+yN} = \frac{1}{xy^2 + y(x^2 - xy - y^2)} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

양변에 이를 곱하면

$$\frac{y}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 - xy - y^2}{y(x^2 - y^2)}dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)}$$

$$\rightarrow F = \frac{1}{2}\ln(x-y) - \frac{1}{2}\ln(x+y) + k(y)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} + k'(y)$$

$$= -\frac{x}{x^2 - y^2} + k'(y) \leftarrow \frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}$$

따라서 $k'(y) = \frac{1}{y} \rightarrow \therefore k(y) = \ln y$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x-y) - \frac{1}{2}\ln(x+y) + \ln y$$

$dF=0$에서 $F=c$이므로 해는 $\frac{1}{2}\ln(x-y)-\frac{1}{2}\ln(x+y)+\ln y=c$

또는 $(x-y)y^2=c(x+y)$

3. 1계 선형 미방 해의 공식

$y'+p(x)y=r(x)$

$r(x)=0$인 경우 제차(homogeneous) 방정식이 된다.

$dy+[p(x)y-r(x)]dx=0 \leftarrow N=1,\ M=p(x)y-r(x)$

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{1}[p(x)-0]=p(x)$

따라서 적분인자는 $\lambda=e^{\int p(x)dx}$이다.

$e^{\int p(x)dx}y'+e^{\int p(x)dx}p(x)y=e^{\int p(x)dx}r(x)$

$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=e^{\int p(x)dx}r(x)$

$e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+c$

해는 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+c\right]$

Ex) $y'-y=e^{2x}$

$p(x)=-1,\ r(x)=e^{2x}$

$$y = e^{-\int(-1)\,dx}\left[\int e^{\int(-1)\,dx} e^{2x}dx + c\right] = e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}dx + c\right] = e^{2x} + ce^{x}$$

Ex) $y' + y\tan x = \sin 2x \qquad y(0) = 1$

$p(x) = \tan x,\ r(x) = \sin 2x$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \tan x\,dx}\left[\int e^{\int \tan x\,dx} \sin 2x\ dx + c\right] \\ &= e^{\ln\cos x}\left[\int e^{-\ln\cos x}(2\sin x\cos x)dx + c\right] \\ &= \cos x\left[\int \frac{1}{\cos x}(2\sin x\cos x)\,dx + c\right] \\ &= \cos x[-2\cos x + c] \\ &= -2\cos^2 x + c\cos x \end{aligned}$$

아래 적분을 이용하였다.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln\cos x$$

$\leftarrow \cos x = t,\ -\sin x\,dx = dt$

$y(0) = 1$에서 $c = 3$을 구할 수 있다. 따라서 해는 $y = -2\cos^2 x + 3\cos x$

Ex) $xy' - y = x$

$$y' - \frac{y}{x} = 1$$

$$p(x) = -\frac{1}{x},\ r(x) = 1$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx + c\right] \\ &= e^{\ln x}\left[\int e^{-\ln x}dx + c\right] \\ &= x[\ln x + c] \end{aligned}$$

4. 기타 1계 미분방정식

(1) $f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)P(x)=Q(x)$

$v=f(y)$라 두면 $\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x)$: 1계 선형 미분방정식

Ex) $e^y\frac{dy}{dx}+e^y=4\sin x$

$v=e^y \rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dv}{dx}+v=4\sin x$

$p(x)=1,\ r(x)=4\sin x$

$$\begin{aligned} y=e^y &= e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}4\sin x\,dx+c\right] \\ &= e^{-x}\left[4\int e^x\sin x\,dx+c\right] \\ &= e^{-x}[2e^x(\sin x-\cos x)+c] \\ &= 2(\sin x-\cos x)+ce^{-x} \end{aligned}$$

$\therefore\ y=\ln\left[2(\sin x-\cos x)+ce^{-x}\right]$