선형 편미분방정식

(linear partial differential equation)

$y(x,t)$; 두 개의 변수

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}+C\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+D\frac{\partial y}{\partial x}+E\frac{\partial y}{\partial t}+Fy=G$$

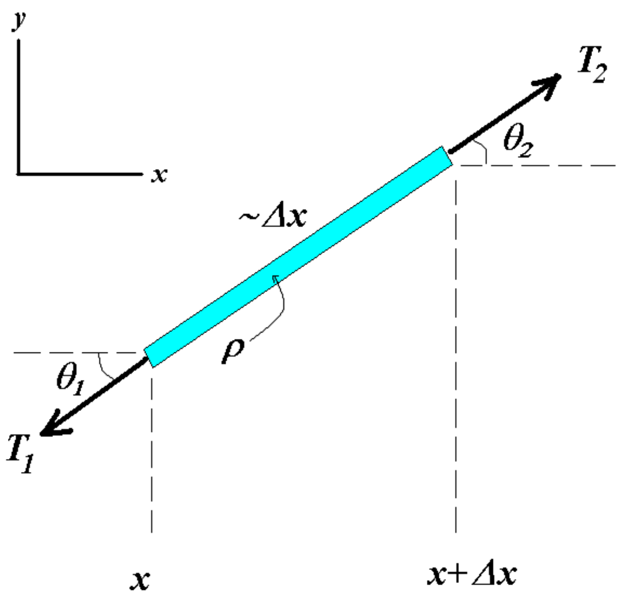
A, B, C, D, E, G; (x,t)의 함수

$G=0$; Homogeneous, $G\neq 0$; Non-homogeneous

I. 편미분방정식의 종류

(1) 파동방정식(wave equation)

(a) 현의 진동



$$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 = T \qquad (1)$$

$$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \equiv ma \qquad (2)$$

(1)에서 $T_1 = \dfrac{T}{\cos\theta_1},\ T_2 = \dfrac{T}{\cos\theta_2}$이므로 이를 (2)에 대입하면

$$\tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ 라고 두면 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (현의 진동의 파동방정식)

삼차원의 경우 $\nabla^2 y = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

(b) 전자기파

Maxwell 방정식 (진공)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

$\nabla \times (3) \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$이고

$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$와 식 4($\nabla \times \vec{B}$)를 이용하면

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

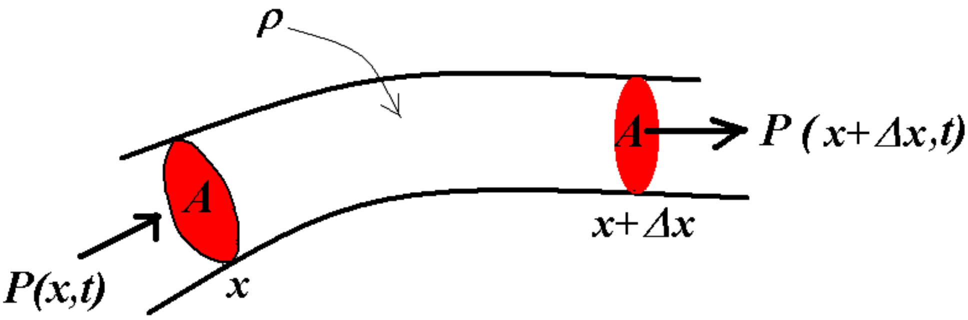
동일하게

$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$을 얻을 수 있다.

여기서 c는 진공 속에서의 빛의 속도이다.

1차원 평면파의 해는 $E(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$로 표현된다.

(2) 열 방정식(heat equation)



열전도 방정식(heat conduction equation); 1차원, (막대의) 표면으로 열이 빠져나가지 않고 열은 단면을 통해서만 전달된다. 그리고 막대는 균일 (열전도, 밀도 등)하다고 가정한다.

$$P = -\kappa A \frac{\partial \Im}{\partial x} \qquad (1)$$

P ; heat flow ($P>0$; in $P<0$; out)

– sign; heat flow from hot to cold

κ ; 열전도도

$$\frac{\partial \Im}{\partial x}=0$$; no heat flow (constant temperature region)

$$dQ=mc\,d\Im \rightarrow \frac{dQ}{dt}=mc\frac{d\Im}{dt}$$

$$m=\rho A\Delta x,\quad \frac{dQ}{dt}=P(x,t)-P(x+\Delta x,t) \qquad (2)$$

$$\therefore mc\frac{d\Im}{dt}=\rho A\Delta x\, c\frac{d\Im}{dt}=\frac{dQ}{dt} \qquad (3)$$

식 2에 식 1을 적용하면

$$\frac{dQ}{dt}=-\kappa A\frac{\partial \Im(x,t)}{\partial t}+\kappa A\frac{\partial \Im(x+\Delta x,t)}{\partial t} \qquad (4)$$

식 3에 식 4를 이용하면

$$\frac{\partial \Im}{\partial t}=\frac{\kappa}{\rho c}\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial \Im(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial \Im(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\kappa}{\rho c}\frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \Im}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$$, η; thermal diffusivity

내부에 열의 발생과 소멸이 있을 경우

$$\frac{\partial \Im}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}+\frac{Q(x,t)}{\rho c}$$; $Q(x,t)$; heat generated / volume-time

$Q>0$; 열 흡수, $Q<0$; 열 방출

(3) Poisson Equation, Laplace Equation

(a) 정전기장의 경우

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: Gauss Law

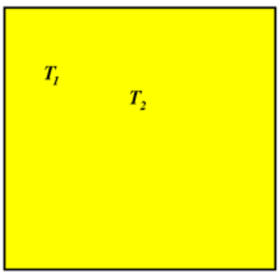
$\nabla \times \vec{E} = 0$: Electrostatics $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$; potential : V

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\therefore \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$: Poisson Equation

$\rho = 0$인 경우 $\nabla^2 V = 0$: Laplace Equation

(b) 온도의 평형상태



Heat equation에서 온도의 시간에 따른 변화가 없으면

$\frac{\partial \Im}{\partial t} = 0$이고 열적 평형상태이다. $\frac{\partial \Im}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$에서 $\frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2} = 0$이다.

3차원의 경우 $\nabla^2 \Im = 0$이고 2차원의 경우 $\frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Im}{\partial y^2} = 0$이다.

2차원 hot plate

온도평형에서 위치에 따른 온도변화를 구함. $\Im(x,y)$

II. 초기 및 경계조건

(a) 초기조건(initial condition)

-현의 진동

시간에 따른 2차 미분 ($\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$) ;

두 개의 조건이 필요함.

$$y(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

-heat equation

시간에 따른 1차 미분 ($\frac{\partial \Im}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$) : 한 개의 초기조건

$T(x,0) = f(x)$: 위치에 따른 온도의 분포

(b) 경계조건(boundary condition)

-현의 진동

$y(0,t)=h_1(t)$: 현의 평형위치에서의 변위
$y(L,t)=h_2(t)$

끝이 고정되어 있는 경우 : $h_1(t)=0,\ h_2(t)=0$

-heat equation

(i) Dirichlet conditions (prescribed temperature)

$\mathfrak{I}(0,t)=g_1(t)$; 경계면에서의 온도
$\mathfrak{I}(L,t)=g_2(t)$

(ii) Neumann conditions (prescribed heat flux)

$-\kappa\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}|_{x=0}=\psi_1(t)$; heat flow at boundaries

$-\kappa\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}|_{x=L}=\psi_2(t)$

막대 끝에 완전 단열(insulated)이 되는 경우 경계조건

$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}|_{x=0}=0,\ \ \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}|_{x=L}=0$

(iii) Newton's law of cooling (Robins condition)

온도가 다른 배경(유체, 공기)에 놓여 있을 때

$-\kappa\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x}|_{x=0}=-h\left[\mathfrak{I}(0,t)-g_1(t)\right]$

$$\Im(0,t) > g_1(t);\leftarrow \quad \Im(0,t) < g_1(t);\rightarrow$$

$$-\kappa\frac{\partial \Im}{\partial x}|_{x=L} = h[\Im(L,t) - g_2(t)]$$

$$\Im(L,t) > g_1(t);\rightarrow \quad \Im(L,t) < g_1(t);\leftarrow$$

$g_1(t), g_2(t)$; 주위의 온도

(iv) Periodic boundary condition

$$\Im(-L,t) = \Im(L,t)$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial x}|_{x=-L} = \frac{\partial \Im}{\partial x}|_{x=L}$$

III. 변수분리(separation of variables)

$y(x,t) = X(x)T(t)$; ordinary differential equation으로 전환

Ex) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial y}{\partial t}$

$y(x,t) = X(x)T(t)$라고 두면

$X''T = 4XT'$

양변을 $4XT$로 나누면

$\dfrac{X''}{4X} = \dfrac{T'}{T} = -\lambda$; λ는 분리상수 (separation constant)

$\therefore X'' + 4\lambda X = 0,\quad T' + \lambda T = 0$; 두 개의 ordinary 미분방정식으로 전환

λ; zero, positive, negative

(i) $\lambda = 0$인 경우

$$X'' = 0,\ \ T' = 0$$
$$\rightarrow X = c_1 + c_2 x,\ \ T = c_3$$
$$\therefore y_1(x,t) = (c_1 + c_2 x)c_3 = A_1 x + B_1$$

(ii) $\lambda = -\alpha^2$인 경우 ($\lambda < 0,\ \alpha > 0$)

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0,\ \ T' - \alpha^2 T = 0$$
$$\rightarrow X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x,\ \ T = c_6 e^{\alpha^2 t}$$
$$\begin{aligned}\therefore y_2(x,t) &= (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x)c_6 e^{\alpha^2 t} \\ &= A_2 e^{\alpha^2 t} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 t} \sinh 2\alpha x\end{aligned}$$

(iii) $\lambda = \alpha^2$인 경우 ($\lambda > 0,\ \alpha > 0$)

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0,\ \ T' + \alpha^2 T = 0$$
$$\rightarrow X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \sin 2\alpha x,\ \ T = c_9 e^{-\alpha^2 t}$$
$$\begin{aligned}\therefore y_3(x,t) &= (c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \sin 2\alpha x)c_8 e^{-\alpha^2 t} \\ &= A_3 e^{-\alpha^2 t} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 t} \sin 2\alpha x\end{aligned}$$

최종적인 해는 중첩의 원리에 의해

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$$

IV. 편미분방정식의 예

Ex1) $\dfrac{\partial \Im}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$; heat equation

$\Im(x,0) = f(x)$; 초기조건
$\Im(0,t) = 0,\ \Im(L,t) = 0$; 경계조건

$\Im(x,t) = X(x)T(t)$을 대입하면

$$X T' = \kappa X'' T$$

양변을 XT로 나누면

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\kappa}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\therefore X'' + \lambda X = 0,\ \ T' = -\kappa\lambda T \leftarrow X(0) = X(L) = 0,\ T(0) = f(x)$$

(i) $\lambda = 0$인 경우

$X'' = 0, \quad T' = 0$
$\rightarrow X = c_1 + c_2 x,\ T = c_3$
경계조건에서 $X(0) = c_1 = 0, X(L) = c_2 L = 0$
$X(x) = 0$가 되므로 고유치가 될 수 없다.

(ii) $\lambda < 0$인 경우

$$X'' + \lambda X = 0$$

$\rightarrow X = c_3 \cosh \sqrt{-\lambda}\, x + c_4 \sinh \sqrt{-\lambda}\, x$

경계조건에서 $X(0) = c_1 = 0, X(L) = c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}\, L = 0 \rightarrow c_2 = 0$

$(\because e^{\alpha L} - e^{-\alpha L} \neq 0 \rightarrow c_2 = 0)$

$X(x) = 0$가 되므로 고유치가 될 수 없다.

(iii) $\lambda > 0$인 경우

$X'' + \lambda X = 0$

$\rightarrow X = c_5 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_6 \sin \sqrt{\lambda}\, x$

경계조건에서 $X(0) = c_5 = 0,\ X(L) = c_6 \sin \sqrt{\lambda}\, L = 0$

$$\therefore L\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \ ; n = 1, 2, \cdots$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

시간에 대한 함수는

$$T' = \kappa \lambda_n T \ \rightarrow \ T(t) = c e^{-\kappa \lambda_n t} = c e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$\therefore \Im_n(x, t) = X(x)\, T(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}\, e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

중첩원리에 의해

$$\Im(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \quad (1)$$

위의 해는 초기조건을 만족하여야 한다. $\Im(x,0) = f(x)$

$$\Im(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$ 을 이용하면

$$\therefore B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \qquad (2)$$

식 2를 식 1에 대입하면 최종적인 해가 된다.

위 문제에서 특수한 경우의 경계조건에 대해 보면

ex1) $f(x) = 6\sin\frac{\pi x}{L}$ 인 경우

$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(6\sin\frac{\pi x}{L}\right) \sin\frac{n\pi x}{L} dx = 6$; $n = 1$인 경우만 적분 값을 가짐

$\therefore \Im(x,t) = 6\sin\frac{\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$; 확인 $t = 0$

ex2) $f(x) = 12\sin\frac{9\pi x}{L} - 7\sin\frac{4\pi x}{L}$ 인 경우

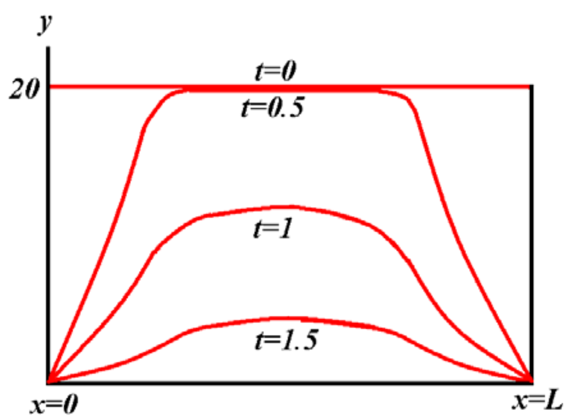
위의 예와 마찬가지의 계산에 의하면 $B_9 = 12, B_4 = -7$, 이 외의 나머지 계수는 모두 0이 된다.

$$\therefore \Im(x,t) = 12\sin\frac{9\pi x}{L}e^{-\kappa\left(\frac{9\pi}{L}\right)^2 t} - 7\sin\frac{4\pi x}{L}e^{-\kappa\left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 t} \quad ;\ \text{확인}\ t=0$$

ex3) $f(x) = 20$인 경우

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L 20\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left[-\frac{20L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L$$
$$= \frac{2}{L}\left[\frac{20L(1-\cos n\pi)}{n\pi}\right] = \frac{40\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}$$

$$\therefore \Im(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{40\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$



Ex2) $\frac{\partial\Im}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2\Im}{\partial x^2}$; heat equation (끝부분이 단열된 경우)

$\Im(x,0) = f(x)$; 초기조건

$\frac{\partial \Im}{\partial x}|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial \Im}{\partial x}|_{x=L} = 0$; 경계조건 (단열)

$\Im(x,t) = X(x)T(t)$을 대입하면

$XT' = \kappa X''T$
양변을 XT로 나누면

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\kappa}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\therefore X'' + \lambda X = 0,\ \ T' = -\kappa\lambda T \leftarrow \frac{dX}{dx}(0) = 0,\ \frac{dX}{dx}(L) = 0,\ T(0) = f(x)$$

(i) $\lambda = 0$인 경우

$X'' = 0$
$\rightarrow X = c_1 + c_2 x$

경계조건에서 $\frac{dX}{dx}(0) = c_2 = 0 \rightarrow \therefore X = c_1$

$\frac{dX}{dx}(L) = 0$ (만족)

따라서 $\lambda = 0$도 고유치가 될 수 있다. 고유함수는 $X = 1$로 둘 수 있다

(ii) $\lambda < 0$인 경우 ($\lambda = -\alpha^2$)

$X'' - \alpha^2 X = 0$
$\rightarrow X = c_3 \cosh \alpha x + c_4 \sinh \alpha x$

경계조건에서 $\dfrac{dX}{dx}(0) = \alpha c_4 = 0,\ \therefore c_4 = 0, \quad \rightarrow X = c_3 \cosh \alpha x$

$$\frac{dX}{dx}(L) = \alpha c_3 \sinh \alpha L \neq 0$$

따라서 $\lambda < 0$인 경우는 고유치가 될 수 없다.

(iii) $\lambda > 0$인 경우 $(\lambda = \alpha^2)$

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

$$\rightarrow X = c_5 \cos \alpha x + c_6 \sin \alpha x$$

경계조건에서 $\dfrac{dX}{dx}(0) = c_6 \alpha = 0,\ \therefore c_6 = 0 \rightarrow X = c_5 \cos \alpha x$

$$\frac{dX}{dx}(L) = c_6 \alpha \sin \alpha L = 0$$

$$\therefore \alpha L = n\pi \rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \cdots$$

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

결과적으로 해는

$$\lambda_0 = 0 \qquad X_0 = 1 \qquad n = 0$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

시간에 대한 함수는

$$T' = \kappa\lambda_n T \;\rightarrow\; T(t) = ce^{-\kappa\lambda_n t} = ce^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

따라서 해는

$$\therefore \mathfrak{I}_n(x,t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n = 0,1,2,3,\cdots$$

일반해는 중첩원리에 의해

$$\mathfrak{I}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{I}_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n = 0,1,2,3,\cdots \quad (1)$$

위의 해는 초기조건을 만족하여야 한다. $\mathfrak{I}(x,0) = f(x)$

$$\mathfrak{I}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

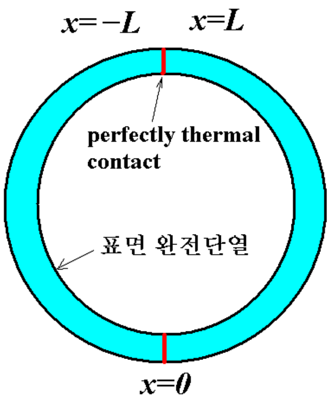
$$\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{L}{2} & m = n \end{cases}$$ 과

$m = n = 0$인 경우 $\int_0^L dx = L$을 이용하면

$$\therefore A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx & n = 0 \\ \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx & n \neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

식 2를 식 1에 대입하면 최종적인 해가 된다.

Ex3) $\dfrac{\partial \Im}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 \Im}{\partial x^2}$; heat equation (periodic condition, 원형 ring 안의 온도분포)



경계조건

$$\Im(-L,t) = \Im(L,t)$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial x}\Big|_{x=-L} = \frac{\partial \Im}{\partial x}\Big|_{x=L}$$

$\Im(x,0) = f(x)$: 초기조건

$\Im(x,t) = X(x)\,T(t)$을 대입하면

$$X\,T' = \kappa X''\,T$$

양변을 XT로 나누면

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\kappa}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\therefore X'' + \lambda X = 0, \quad T' = -\kappa\lambda T$$

$$\leftarrow X(-L) = X(L), \ \frac{dX}{dx}(-L) = \frac{dX}{dx}(L), \ T(0) = f(x)$$

(i) $\lambda = 0$인 경우

$X'' = 0$

$\rightarrow X = c_1 + c_2 x$

경계조건에서 $X(-L) = X(L) \rightarrow c_1 - c_2 L = c_1 + c_2 L \ \therefore c_2 = 0$

$$X(x) = c_1 \ \rightarrow \frac{dX}{dx}(-L) = \frac{dX}{dx}(L) \text{ (자동 만족)}$$

따라서 $\lambda = 0$도 고유치가 될 수 있다. 고유함수는 $X = 1$로 둘 수 있다

(ii) $\lambda < 0$인 경우 ($\lambda = -\alpha^2$)

$X'' - \alpha^2 X = 0$

$\rightarrow X = c_3 \cosh \alpha x + c_4 \sinh \alpha x$

경계조건; $X(-L) = X(L)$ 에서

$c_3 \cosh[\alpha(-L)] + c_4 \sinh[\alpha(-L)] = c_3 \cosh \alpha L + c_4 \sinh \alpha L$

$\rightarrow \therefore c_4 = 0$

따라서 $X(x) = c_3 \cosh \alpha x$이다.

경계조건; $\frac{dX}{dx}(-L) = \frac{dX}{dx}(L)$에서

$c_3 \alpha \sinh[\alpha(-L)] = c_3 \alpha \sinh \alpha L \rightarrow \therefore c_3 = 0$

따라서 $\lambda < 0$인 경우는 고유치가 될 수 없다.

(iii) $\lambda > 0$인 경우 ($\lambda = \alpha^2$)

$X'' + \alpha^2 X = 0$

$\rightarrow X = c_5 \cos \alpha x + c_6 \sin \alpha x$

경계조건; $X(-L) = X(L)$ 에서

$c_5 \cos[\alpha(-L)] + c_6 \sin[\alpha(-L)] = c_5 \cos\alpha L + c_6 \sin\alpha L$

$\rightarrow 2c_6 \alpha \sin\alpha L = 0$ (1)

경계조건; $\frac{dX}{dx}(-L) = \frac{dX}{dx}(L)$에서

$-c_5 \alpha \sin[\alpha(-L)] + c_6 \alpha \cos[\alpha(-L)] = -c_5 \alpha \sin\alpha L + c_6 \alpha \cos\alpha L$

$\rightarrow 2c_5 \alpha \sin\alpha L = 0$ (2)

식 1과 2에서 $\sin\alpha L \neq 0$이면 $c_5 = 0, c_6 = 0$ ($X = 0$이므로 불가)

$\therefore \sin \alpha L = 0 \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$가 만족된다.

c_5, c_6는 모두 0이 될 필요가 없으므로 고유함수는

$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$ $n = 1, 2, 3, \cdots$

따라서 고유치와 고유함수는

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$ $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$ $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

시간에 대한 함수는

$$T' = \kappa\lambda_n T \rightarrow T(t) = ce^{-\kappa\lambda_n t} = ce^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

따라서 해는

$$\Im_n(x,t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$\Im_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

일반해는 중첩원리에 의해

$$\Im(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Im_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (1)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

위의 해는 초기조건을 만족하여야 한다. $\Im(x,0) = f(x)$

$$\Im(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

$n=0$인 경우 $\int_{-L}^{L} A_0 dx = \int_{-L}^{L} f(x) dx$이므로

$$A_o = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad (2\text{-}1)$$

이고 B_o는 존재하지 않는다.

$n \neq 0$인 경우

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$ 을 이용하면

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{2-2}$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

식 2-1과 2-2를 식 1에 대입하면 최종적인 해가 된다.

Ex4) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; vibrating string (끝점 고정)

$y(x,0) = f(x)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$; 초기조건

$y(0,t) = 0$, $y(L,t) = 0$; 경계조건 (끝점 고정)

$y(x,t) = X(x)T(t)$을 대입하면

$$XT'' = v^2 X'' T$$

양변을 XT로 나누면

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

$\therefore X'' + \lambda X = 0 \;\leftarrow X(0) = 0, X(L) = 0$

$\quad T'' + v^2 \lambda T = 0 \leftarrow T(0) = f(x),\, T'(0) = g(x)$

(i) $\lambda = 0$인 경우

$X'' = 0$

$\rightarrow X = c_1 + c_2 x$

경계조건에서 $X(0) = c_1 = 0 \rightarrow \therefore X = c_2 x$

$X(L) = c_2 L = 0 \rightarrow \therefore c_2 = 0$

따라서 $\lambda = 0$는 고유치가 될 수 없다.

(ii) $\lambda < 0$인 경우 $(\lambda = -\alpha^2)$

$X'' - \alpha^2 X = 0$

$\rightarrow X = c_3 \cosh \alpha x + c_4 \sinh \alpha x$

경계조건에서 $X(0) = c_3 = 0 \;\rightarrow X = c_4 \sinh \alpha x$

$X(L) = \alpha c_3 \sinh \alpha L \neq 0$

따라서 $\lambda < 0$인 경우는 고유치가 될 수 없다.

(iii) $\lambda > 0$인 경우 $(\lambda = \alpha^2)$

$X'' + \alpha^2 X = 0$

$\rightarrow X = c_5 \cos \alpha x + c_6 \sin \alpha x$

경계조건에서 $X(0) = c_5 = 0,\; \therefore c_5 = 0 \rightarrow X(x) = c_6 \sin \alpha x$

$X(L) = c_6 \sin \alpha L = 0$

$$\therefore \alpha L = n\pi \rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \cdots$$

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

시간에 대한 함수는

$$T'' + v^2\lambda_n T \rightarrow \therefore T(t) = d_1 \cos\frac{n\pi v t}{L} + d_2 \sin\frac{n\pi v t}{L}$$

따라서 일반해는 중첩원리에 의해

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi v t}{L} + B_n \sin\frac{n\pi v t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (1)$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$

위의 해는 초기조건을 만족하여야 한다.

초기조건 $y(x,0) = f(x)$에서

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

sin 함수의 직교 조건을 이용하면

$$\therefore A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\Leftarrow \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2} \text{ for } m = n$$

또 다른 초기조건 $\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0}=g(x)$에서

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-A_n\frac{n\pi v}{L}\sin\frac{n\pi vt}{L}+B_n\frac{n\pi v}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi v B_n}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x)$$

$$\therefore B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

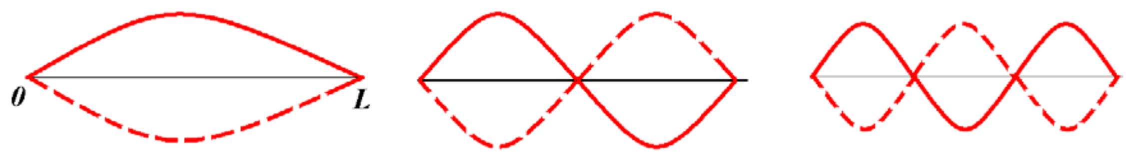
※특수한 경우: 정지 상태에서 시작했다면 $g(x)=0$이므로 $B_n=0$가 된다.

$y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)+\cdots$에서 각각의 성분은

$y_n(x,t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi vt}{L}+\phi_n\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$로 주어진다.

여기서 $C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, $\sin\phi_n=\frac{A_n}{C_n}$, $\cos\phi_n=\frac{B_n}{C_n}$. 즉 $\tan\phi_n=\frac{A_n}{B_n}$

그리고 $\sin\left(\frac{n\pi vt}{L}+\phi_n\right)$은 시간에 따라 변하는 진폭(time varying amplitude)이고 $\sin\frac{n\pi x}{L}$은 standing wave에 해당된다.



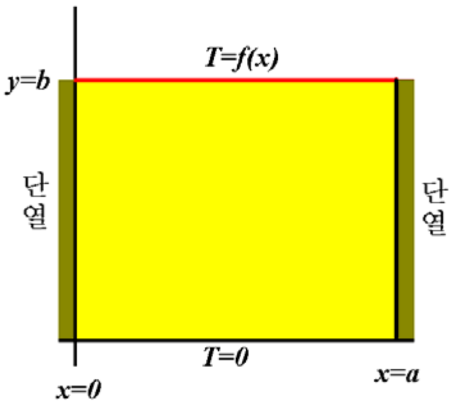
기본파 2 배수파 3 배수파

기본파는 $y_1(x,t) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi v t}{L} + \phi_1\right) \sin\frac{\pi x}{L}$

기본파의 진동수는 $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \leftarrow \because v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

Overtune; $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

Ex5) Laplace equation (hot plate; 평형)



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

경계조건 $T(x,y)$

$$T(x,0) = 0,\ \ T(x,b) = f(x) \qquad 0 < y < b$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ \ \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0 \qquad 0 < x < a$$

$T(x,y) = X(x)\,Y(y)$을 대입하면

$$X\,Y'' = X''\,Y$$

양변을 XY로 나누면

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

$X''+\lambda X=0$ $X'(0)=0,\ X'(a)=0$
$Y''-\lambda Y=0$ $Y(x,0)=0,\ Y(x,b)=f(x)$

$X''+\lambda X=0$ 에서 (경계조건; $X'(0)=0,\ X'(a)=0$)

(i) $\lambda=0$인 경우

$X''=0$
$\rightarrow X=c_1+c_2x$
경계조건에서 $X'(0)=c_2=0$
$X(x)=c_1 \rightarrow X'(a)=0$ (자동 만족)

따라서 $\lambda=0$도 고유치가 될 수 있다. 고유함수는 $X=1$로 둘 수 있다

(ii) $\lambda<0$인 경우 ($\lambda=-\alpha^2$)

$X''-\alpha^2X=0$
$\rightarrow X=c_3\cosh\alpha x+c_4\sinh\alpha x$

경계조건; $X'(0)=c_4\alpha\cosh\alpha L\neq 0$
따라서 $\lambda<0$인 경우는 고유치가 될 수 없다.

(iii) $\lambda > 0$인 경우 ($\lambda = \alpha^2$)

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$
$$\rightarrow X = c_5 \cos\alpha x + c_6 \sin\alpha x$$

경계조건; $X'(0) = c_6 = 0 \rightarrow \therefore X(x) = c_5 \cos\alpha x$

$$X'(a) = c_5 \alpha \sin\alpha a = 0 \rightarrow \therefore \alpha a = n\pi$$
$$\therefore \ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad n = 1, 2, \cdots$$

따라서 고유치와 고유함수는

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{a} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$Y'' - \lambda Y = 0$ 에서 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 을 대입하면

$Y'' - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$ 가 된다.

(i) $\lambda = 0$인 경우

$$Y'' = 0$$
$$\rightarrow Y = c_7 + c_8 y$$

경계조건에서 $Y(0) = c_7 = 0$

$$Y(y) = c_8 y$$

(ii) $\lambda > 0$인 경우

$$Y = c_9 \cosh \frac{n\pi y}{a} + c_{10} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$\Leftarrow$또는 $Y = Ae^{kx} + Be^{-kx} \rightarrow Y(0) = 0 \rightarrow A = -B \rightarrow Y \approx \sinh kx$

경계조건; $Y(0) = c_9 = 0 \rightarrow \therefore Y(y) = c_{10} \sinh \frac{n\pi y}{a}$

따라서 $Y(y)$에 대한 해는

$$n = 0 \qquad Y(y) = c_8 y$$

$$n = 1, 2, \cdots \qquad Y(y) = c_{10} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$T_n = X(x)\,Y(y)$에서

$$T_0 = A_0 y \qquad n = 0$$

$$T_n = A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

따라서 일반해는

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

마지막 경계조건 $T(x, b) = f(x)$를 이용하면

$$T(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$n=0$에서는 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_o^a A_o b\,dx \Rightarrow \therefore A_o = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)\,dx$

$n \neq 0$인 경우 $\int_0^a \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{a}{2}$ for $m=n$에서

$$A_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$\rightarrow \therefore A_n = \frac{1}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

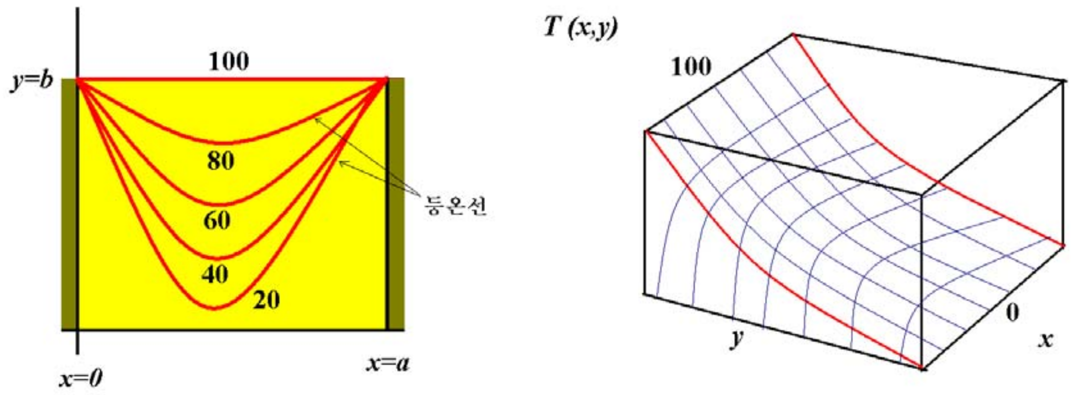
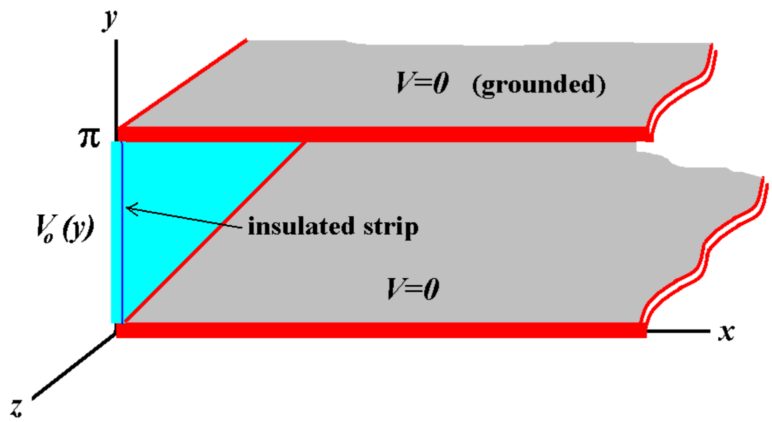


그림: $f(x)=100$인 경우 온도분포

Ex6) Laplace equation (Electric potential #1, 2차원)



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<\infty,\ 0<y<\pi$$

경계조건 $V(x,y)$

$V(x,0)=0,\ V(x,\pi)=0$
$V=V_0(y)|_{x=0}$
$V\to 0$ as $x\to\infty$

$V(x,y)=X(x)Y(y)$을 대입하면
$XY''=X''Y$

양변을 XY로 나누면

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

$X''+\lambda X=0 \qquad X(0)=V_0(y), X(\infty)=0$
$Y''-\lambda Y=0 \qquad Y(0)=0,\ Y(\pi)=0$

이 예의 경우 λ값에 대해 여러 가지로 시도해 볼 필요가 없다. $X(\infty)=0$가 되어야 하는 조건에서 $X(x)$는 $e^{-\alpha x}$의 항이 필요하다. 또한 $Y(y)$도 $y=0$에서 0이 되어야 하므로 sin함수가 되어야 한다. 따라서 $\lambda=-\alpha^2$이 되어야 한다.

$\lambda<0$인 경우 ($\lambda=-\alpha^2$)

(i) $X''-\alpha^2 X=0$

$\rightarrow X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$

$X(\infty) = 0$의 조건을 만족시키기 위해서는 $c_1 = 0$가 되어야 하므로 $X(x) = c_2 e^{-\alpha x}$

(ii) $Y'' - \lambda Y = 0$ 에 $\lambda = -\alpha^2$ 을 대입하면

$Y'' + \alpha^2 Y = 0 \rightarrow Y = c_3 \cos\alpha y + c_4 \sin\alpha y$

경계조건; $Y(0) = 0,\ \ Y(\pi) = 0$

$Y(0) = c_3 = 0 \rightarrow \therefore Y(y) = c_4 \sin\alpha x$

$Y(\pi) = c_4 \sin\alpha\pi = 0 \rightarrow \alpha\pi = n\pi \quad \therefore \alpha = n \quad n = 1, 2, \cdots$

$\alpha = n = 0$는 $X(x) = c_2 e^{-nx} = c_2$가 되어 $x = \infty$ 에서 경계조건을 만족할 수 없으므로 맞지 않음

$\therefore V_n = X(x)\, Y(y) = A_n e^{-nx} \sin ny$

따라서 일반해는

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-nx} \sin ny \qquad (1)$$

마지막 경계조건 $V = V_0(y)|_{x=0}$를 이용하면

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin ny = V_0(y)$$

$$\int_0^{\pi} V(0,y)\sin ky\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin ny\,\sin ky\,dy$$에서 sin의

직교 관계 $\int_0^{\pi} \sin ky\,\sin ny\,dy = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & k = n \end{cases}$를 이용하면

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_0(y)\sin ny\,dy \qquad (2)$$

식 2를 1에 대입한 것이 일반해가 된다.

Ex) $x=0$에 potential이 V_0인 metal plate를 사용한 경우;

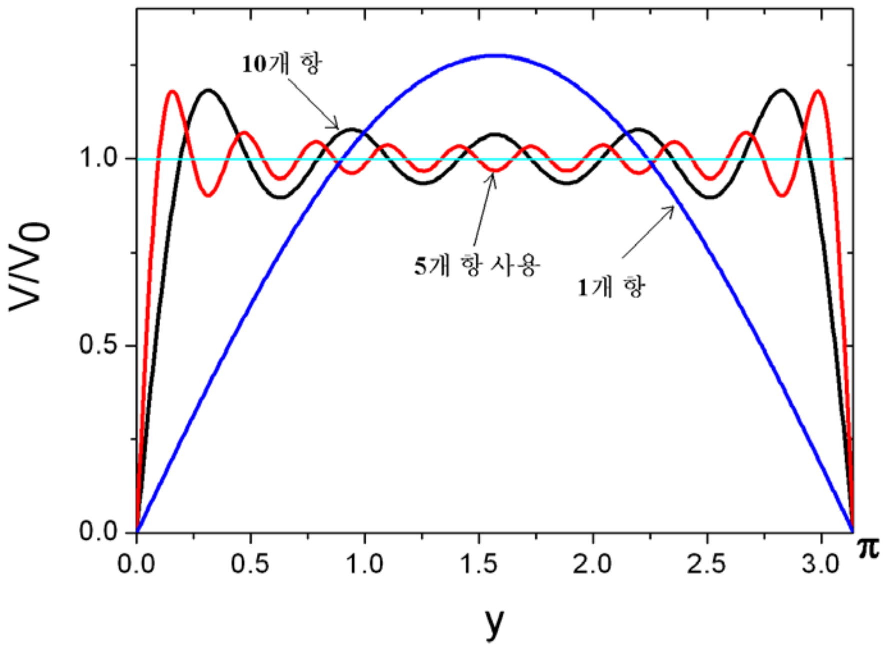
$V_0(y)|_{x=0} = V_0$가 된다. 즉, $y=0$와 $y=\pi$에 있는 grounded plate 사이에 potential V_0인 도체 판을 $x=0$에 끼운 구조이다.

식 2에서

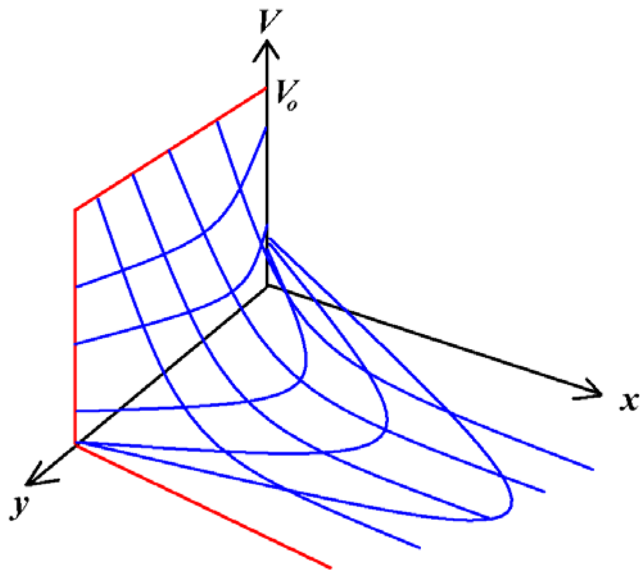
$$A_n = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ny\,dy = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$
$$= \begin{cases} 0 & n: \text{짝수} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi} & n: \text{홀수} \end{cases}$$

따라서 식 1에서

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}\sin ny$$

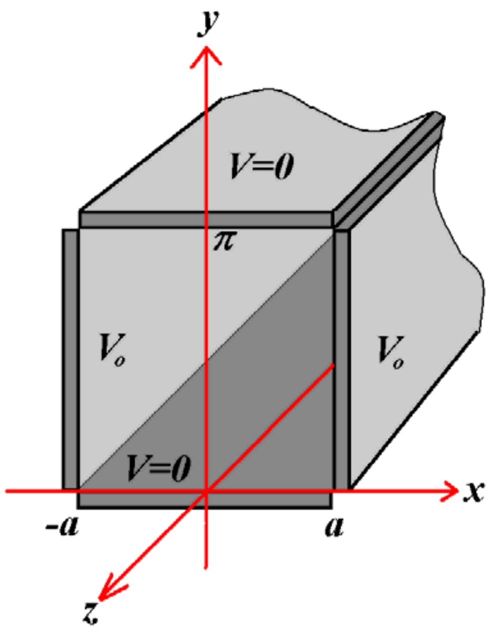


10개 항
5개 항 사용
1개 항
V/V0
y
π
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0



V
Vo
x
y

Ex7) Laplace equation (Electric potential #2, 2차원)



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad -a<x<a,\ 0<y<\pi$$

경계조건

$V=0$ at $y=0$
$V=0$ at $y=\pi$
$V=V_o$ at $x=-a$
$V=V_o$ at $x=a$

$V(x,y)=X(x)Y(y)$을 대입하면
$XY''=X''Y$

양변을 XY로 나누면

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$X'' + \lambda X = 0 \qquad X(-a) = V_0,\ X(a) = V_0$

$Y'' - \lambda Y = 0 \qquad Y(0) = 0,\ \ Y(\pi) = 0$

이 예의 경우에도 λ값에 대해 여러 가지로 시도해 볼 필요가 없다. $Y(0)=0$가 되어야 하는 조건에서 $Y(y)$는 sin함수가 되어야 한다. 따라서 $\lambda = -\alpha^2$이 되어야 한다.

$\lambda < 0$인 경우 ($\lambda = -\alpha^2$)

(i) $X'' - \alpha^2 X = 0$

$\to X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$

$X(-a) = X(a) = V_0$이므로 함수는 대칭이 되어야 한다. 따라서 함수는 $c_1 = c_2$가 되어야 하고

$$X(x) = c_3 \cosh\alpha x$$

(ii) $Y'' - \lambda Y = 0$ 에 $\lambda = -\alpha^2$ 을 대입하면

$Y'' + \alpha^2 Y = 0 \to Y = c_4 \cos\alpha y + c_5 \sin\alpha y$

경계조건; $Y(0) = 0,\ \ Y(\pi) = 0$

$Y(0) = c_4 = 0 \to \qquad \therefore Y(y) = c_5 \sin\alpha x$

$Y(\pi) = c_5 \sin\alpha\pi = 0 \to \alpha\pi = n\pi \quad \therefore \alpha = n \quad n = 1, 2, \cdots$

$$\therefore V_n = X(x)\,Y(y) = A_n \cosh nx\ \sin ny$$

따라서 일반해는

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh nx \sin ny \qquad (1)$$

A_n을 결정하기 위해 경계조건 $V(a,y) = V_0$를 이용하면

$$V(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh na\ \sin ny = V_0$$

sin함수의 직교조건에서

$$A_n = \frac{2V_0}{\pi \cosh na}\int_0^{\pi} \sin ny\,dy = \frac{2V_0}{n\pi \cosh na}(1-\cos n\pi)$$

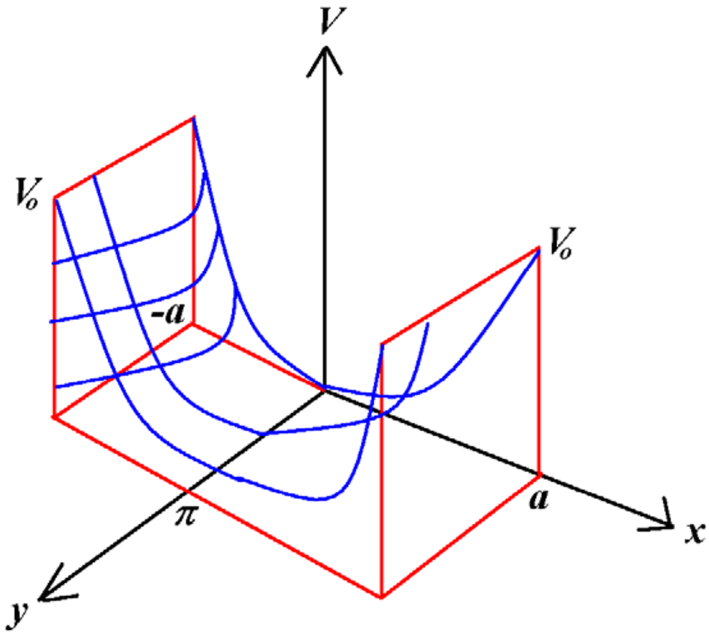
$$= \frac{1}{\cosh na}\begin{cases} 0 & n:\text{짝수} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi} & n:\text{홀수} \end{cases}$$

을 이용하면

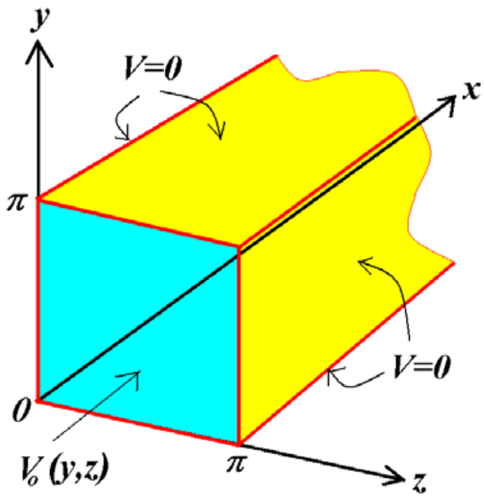
$$A_n = \begin{cases} 0 & n:\text{짝수} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi \cosh na} & n:\text{홀수} \end{cases} \qquad (2)$$

식 2를 1에 대입한 것이 일반해가 된다. 즉, 일반해는

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n}\,\frac{\cosh nx}{\cosh na}\sin ny$$



Ex8) Laplace equation (Electric potential #3, 3차원)



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad 0<x<\infty,\ 0<y<\pi, 0<z<\pi$$

경계조건 $V(x,y,z)$

$V=0$ at $y=0$
$V=0$ at $y=\pi$
$V=0$ at $z=0$
$V=0$ at $z=\pi$
$V=0$ at $x=\infty$
$V=V_o(y,z)$ at $x=0$

$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$을 대입하면
$XY''Z+X''YZ+XYZ''=0$
양변을 XYZ로 나누면

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0$$

$$\frac{X''}{X}=C_1,\ \frac{Y''}{Y}=C_2,\ \frac{Z''}{Z}=C_3 \quad \leftarrow C_1+C_2+C_3=0$$

여기서 $X(\infty)=0$를 만족하기 위해서는 $e^{-\alpha x}$항이 있어야 하므로 $C_1>0$이다. 그리고 $Y(0)=0$, $Z(0)=0$를 만족하기 위해서는 C_2, C_3는 모두 음이 되어야 한다.

따라서 $C_2=-k^2$, $C_3=-l^2$이라고 두면 $C_1=k^2+l^2$이 되어 위의 조건들이 만족된다.

$$\frac{X''}{X}=(k^2+l^2),\ \frac{Y''}{Y}=-k^2,\ \frac{Z''}{Z}=-l^2$$

위 미분방정식의 해들은 각각

$$X(x) = Ae^{\sqrt{k^2+l^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2+l^2}x}$$
$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$
$$Z(z) = E\sin lz + F\cos lz$$

경계조건을 만족하기 위해서는 $A=0,\ D=0, F=0$이 되어야 한다. 따라서 해는

$$V_{kl}(x,y,z) = A_{kl}\, e^{-\sqrt{k^2+l^2}x} \sin ky \sin lz$$

일반해는

$$V(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}\, e^{-\sqrt{k^2+l^2}x} \sin ky \sin lz \qquad (1)$$

A_{kl}을 결정하기 위해 경계조건 $V(0,y,z) = V_0(y,z)$를 이용하면

$$V(0,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{kl} \sin ky \sin lz = V_0(y,z)$$

sin함수의 직교조건을 이용하기 위해 양변에 $\sin ny \sin mz$를 곱하고 적분하면

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{kl} \int_0^{\pi} \sin ky \sin ny\, dy \int_0^{\pi} \sin lz \sin mz\, dz$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} V_0(y,z) \sin ny \sin mz\, dy dz$$

따라서

$$A_{kl}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^\pi\int_0^\pi V_0(y,z)\sin ky\sin lz\,dydz \qquad (2)$$

식 2를 1에 대입하면 일반해가 구해진다.

Ex) $V(0,y,z)=V_0$ (즉, $x=0$에 도체 판을 끼워 넣은 경우)

$$A_{kl}=\begin{cases}0 & n:\text{짝수}\\ \dfrac{16V_0}{\pi^2 kl} & n:\text{홀수}\end{cases}$$

따라서

$$V(x,y,z)=\frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{k=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{l=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{k^2+l^2}\,x}\sin ky\sin lz}{kl}$$